Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti
Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.
Vol. LXXXI-LXXXII,C1A0401003 (2003-04)
Adunanza del 29 aprile 2004

PROPRIETA' DI ALGEBRA LINEARE PER PROBLEMI DI STABILITA' FINITA

G. CARISTI and A. PUGLISI

(Nota presentata dal socio ordinario M. T. Calapso)

ABSTRACT. In this paper we characterize some properties of linear algebra for the resolution of finite stability problem. In particular, we consider some important properties of the stochastic matrix in order to study some economic stability problem.

SOMMARIO. In Questo Lavoro Sono Individuate Alcune Proprietà Dell'algebra Lineare Per La risoluzione di problemi di stabilità finita. In particolare ci si sofferma su alcune proprietà importanti delle matrici stocastiche per poi affrontare alcuni problemi di stabilità economica.

1. **Autovalori e Autovettori.**

Gli autovalori (radici della caratteristica) e gli autovettori (vettori della caratteristica) di una matrice A $n \times n$ sono scalari λ e il vettore x n x 1 diverso da zero è quello che soddisfa l'equazione

$$Ax = \lambda x$$

Per ogni matrice quadrata A, l'equazione sopraesposta è equivalente al sistema di n equazioni lineari ed omogenee:

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = 0$$

queste n equazioni possono essere scritte come:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots(a_{nn} - \lambda)x_n = 0
\end{aligned}$$

dove x_i rappresenta le componenti del vettore x. La serie delle n equazioni ha la soluzione banale, $x_i = 0$. Così il vettore zero, $x = 0$ ha sempre soluzioni. Comunque, siamo interessati solo alle soluzioni non banali.

Risulta ovvio che gli autovalori di una matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

sono precisamente gli elementi sulla diagonale. Mostreremo che in alcune circostanze una matrice quadrata A può essere trasformata in una matrice diagonale D usando una matrice non singolare, chiamata P, con la trasformazione

$$P^{-1}AP = D .$$

Questa trasformazione è chiamata trasformazione della somiglianza. Vediamo allora che *A* e *D* hanno gli stessi autovalori.

Definizione 1. - Due matrici *A* e *B* si dicono simili se c'è ed esiste una matrice non singolare *P* tale che:

$$P^{-1}AP = B .$$

Tre proprietà importanti delle matrici simili possono essere dedotte da questa definizione.
Se *A* e *B* sono matrici simili, allora:

1. i determinanti di *A* e di *B* sono uguali;
2. le due matrici hanno lo stesso rango;
3. *A* e *B* anno la stessa caratteristica polinomiale e quindi hanno lo stesso set di autovalori.

2. **Le matrici stocastiche.**

Sia $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_j, \ldots$ un sistema completo di eventi finito od infinito.
Sia data una successione di esperimenti.
Il risultato di ogni esperimento sarà considerato dal punto di vista della comparsa degli eventi E_j, *(j=1, 2, ...)*.
Definiamo le v.a. ξ_n tale che è il risultato dell'n-esimo esperimento.

$$P(\xi_n = j / \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_{n-1} = i_{n-1}) = P(\xi_n = j)$$

per ogni $n \in N^*$ e per tutti i valori possibili delle v.a. ξ_n.

Definizione 2. - L'insieme delle v.a. $\{\xi_n\}$ forma una catena di Markov se per ogni *n = 1*, 2, … e per tutti i valori possibili delle v.a. ξ_n abbiamo

(1) . $$P(\xi_n = j / \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_{n-1} = i_{n-1}) = P(\xi_n = j / \xi_{n-1} = i_{n-1}).$$

Possiamo dimostrare che se la relazione (1) è verificata allora, per $0 \le n_1 < n_2 < ... < n_s < n$, si ottiene

(1') $$P(\xi_n = j / \xi_{n_1} = i_1, \xi_{n_2} = i_2, ..., \xi_{n_s} = i_s) = P(\xi_n = j / \xi_{n_s} = i_s).$$

Gli eventi E_j , $(j=1,\ 2,\ ...)$ sono chiamati gli stati del sistema.

La distribuzione di probabilità

$$P(\xi_{n-1}=j\,/\,\xi_{n-1}=i)$$

della v.a. ξ_0 è detta *distribuzione iniziale* e le probabilità subordinate $P(\xi_n=j\,/\,\xi_{n-1}=i)$ sono chiamate *probabilità di transizione* dallo stato E_i allo stato E_j .

Definizione 3. - Una catena di Markov tale che le probabilità di transizione sono indipendenti da *n*, cioè

(2)
$$P(\xi_n=j\,/\,\xi_{n-1}=i)=p_{ij} \qquad (n=1,\ 2,\ ...)$$

è detta catena di Markov omogenea.

Consideriamo

(3)
$$P(\xi_n=j)=P_j(n)\,.$$

Tenendo conto che gli eventi $E_1, E_2, \ ...$ formano un sistema completo di eventi, dalla (2) risulta

(4)
$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1 \quad , \quad (i=1,\ 2,...) \quad , \quad p \geq 0\,.$$

La matrice (finita o infinita) delle probabilità di transizione

$$\prod = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & ..... \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & ..... \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... \end{matrix} \right\|$$

formata con elementi non negativi e tale che la somma di tutti gli elementi di una riga qualsiasi valga 1, è detta matrice stocastica.

Proprietà 1. - Se

(5)
$$P(\xi_0=i_0\,,\ \xi_1=i_1\,,\ ...,\ \xi_n=i_n)=P_{i_0}(0)\,p_{i_0 i_1}\,p_{i_1 i_2}\ ...\ p_{i_{n-1} i_n} \ ,$$

dunque la *matrice stocastica* $\prod$ insieme alla distribuzione iniziale definiscono completamente la catena di Markov.

Definizione 4. - Le quantità $p_{ij}^{(n)}$, $(n=0,1,...)$ definite dalle relazioni

(6) $$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & se \quad i \neq j \ , \\ 1 & se \quad i = j \ , \end{cases}$$

(6') $$p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \ ,$$

(6'') $$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}^{(1)}$$

si chiamano probabilità di transizione in n passi e le equazioni (6'') si chiamano equazioni di Chapmann-Kolmogorov.

Proprietà 2. - Si ha

(7) $$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_{m+n} = j / \xi_m = i)$$

e

(8) $$p_j(n) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(0) p_{ij}^{(n)} \ , \qquad (j = 1, 2, ...).$$

Conseguenza. Se denotiamo con $\Pi^{(n)}$ la matrice delle probabilità di transizione in n passi, allora $\Pi^{(n)}$ è una matrice stocastica e si ha

(9) $$\Pi^{(n)} = \Pi^n \ .$$

Consideriamo ora il caso in cui il numero di stati di una catena di Markov è finito. Sia *m* questo numero.

La matrice delle probabilità di transizione è allora

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{Vmatrix} .$$

Siano $\lambda_1, ..., \lambda_p$ gli autovalori della matrice Π, ossia le radici dell'equazione caratteristica di Π,

(10) $$\det(\Pi - \lambda I_m) = 0 \ .$$

Se λ_j è un autovalore della matrice Π un vettore colonna X_j è detto autovetture a sinistra di Π se

(11) $$\Pi X_j = \lambda_j X_j$$

ed un vettore colonna Y_j è detto autovetture a destra di Π se

(12) $$Y_j^* \Pi = \lambda_j Y_j^* \ .$$

Proprietà 3. - Gli autovalori della matrice stocastica Π hanno le seguenti proprietà:
1° se λ è un autovalore Π, allora $|\lambda| \le 1$;
2° se $\lambda = 1$ è un autovalore di Π
3° se l'autovalore λ è complesso e $|\lambda| = 1$, allora è una radice intera dell'unità.

Supponiamo ora che la matrice Π ha gli autovalori semplici.
Siano λ_j e λ_k due autovalori, Allora

$$\Pi X_j = \lambda_j X_j \quad , \quad Y_k^* \Pi = \lambda_k Y_k^* \ .$$

Abbiamo

$$\lambda_j Y_k^* X_j = Y_k^* \Pi X_j = \lambda_k Y_k^* X_j$$

ovvero

$$(\lambda_j - \lambda_k) Y_k^* X_j = 0 \ .$$

Ma $\lambda_j \ne \lambda_k$, quindi

(13) $$Y_k^* X_j = 0 \quad , \quad (j \ne k = 1, \dots, m) \ .$$

Scegliendo un fattore di moltiplicazione adeguato, possiamo supporre

(14) $$Y_j^* X_j = 1 \quad , \quad (j = 1, \dots, m) \ .$$

E denotando con

$$H = \| X_1 X_2 \dots X_m \| \quad , \quad H_1 = \left\| \begin{matrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_m^* \end{matrix} \right\| .$$

Segue

$$H_1 \cdot H = \| Y_k^* X_j \| \quad , \quad (j, k = 1, \dots, m) \ ,$$

dunque tenendo conto delle relazioni (13) e (14),

$$H_1 \cdot H = \| \delta_{kj} \| = I_m \ ,$$

cioè

$$H_1 = H^{-1} \ .$$

Posto

$$X_j = \begin{Vmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{Vmatrix} \quad , \qquad Y_k^* = \| y_{k1} y_{k2} \dots y_{km} \| ,$$

le equazioni (13) e (14) si scrivono

$$\text{(15)} \qquad \sum_{i=1}^{m} y_{ki} x_{ij} = \delta_{kj} \quad , \qquad (j,k = 1,\dots,m) .$$

Sia

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{Vmatrix} .$$

Abbiamo

$$H \Lambda H^{-1} = \Pi$$

ossia, in base alla (9)

$$\Pi^{(n)} = H \Lambda H^{-1} \cdot H \Lambda H^{-1} \dots H \Lambda H^{-1} = H \Lambda^n H^{-1}$$

ove

$$\Lambda^n = \begin{Vmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_m^n \end{Vmatrix} .$$

Se gli autovettori X_j e Y_j sono qualsiasi, risulta

$$\text{(16)} \qquad \Pi^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} C_j \lambda_j^n X_j Y_j^*$$

con

$$C_j = \frac{1}{Y_j^* X_j} .$$

Allora

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} C_j \lambda_j^m x_{ij} y_{jk} \ ,$$

dove

$$C_j = \frac{1}{\sum_{l=1}^{m} y_{jl} x_{li}} .$$

Definizione 5. - Diciamo che lo stato E_k può essere raggiunto a partire da uno stato E_j se esiste qualche $n \geq 0$ tale che $p_{jk}^{(n)} > 0$.

Una catena di Markov detta irriducibile se ogni stato può essere raggiunto a partire da un altro stato.

Un insieme C di stati di una catena di Markov è detto chiuso se nessuno stato esterno a C può essere raggiunto a partire da uno stato compreso nell'insieme C, ossia $p_{ik} = 0$ se $E \in C$ ed $E \notin C$.

Il più piccolo insieme di stati che contenga C e detto la chiusura di C.

Quando un insieme chiuso è formato da un solo stato E_k, questo stato è detto assorbente. In questo caso abbiamo $p_{kk} = 1$.

Definizione 6. - Una catena di Markov è detta ergodica se le distribuzioni di probabilità $\{P_j(n)\}$ convergono sempre verso una distribuzione limite $\{P_j\}$ indipendente dalla distribuzione iniziale $\{P_j(0)\}$ cioè

$$\lim_{n\to\infty} = P_j(n) = P_j \quad , \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Esempio: consideriamo una catena di Markov con due stati E_1 ed E_2, le probabilità di transizione

$$p_{11} = p_{22} = p \ , \ p_{12} = p_{21} = q \quad , \qquad (0 < p < 1, \ p + q = 1)$$

e la distribuzione iniziale

$$P(\xi_0 = 1) = \alpha \ , \ P(\xi_0 = 2) = \beta \ , \ (\alpha + \beta = 1) .$$

La matrice delle probabilità di transizione è

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p & q \\ q & p \end{Vmatrix},$$

avendo gli autovalori

$$\lambda_1 = p + q = 1 \quad , \quad \lambda_2 = p - q .$$

Le equazioni (11) e (12) ci danno gli autovettori

$$X_1 = Y_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad , \quad X_2 = Y_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} .$$

Allora la formula (16) fornisce

$$\Pi^{(n)} == \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{(p-q)^n}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix},$$

donde, tenendo conto della formula (8),

$$P_1(n) = \alpha p_{11}^{(n)} + \beta p_{21}^{(n)} = \frac{\alpha}{2}[1+(p-q)^n] + \frac{\beta}{2}[1-(p-q)^n] = \frac{1}{2} + \frac{(\alpha-\beta)(p-q)^n}{2},$$

$$P_2(n) = \alpha p_{12}^{(n)} + \beta p_{22}^{(n)} = \frac{\alpha}{2}[1-(p-q)^n] + \frac{\beta}{2}[1+(p-q)^n] = \frac{1}{2} - \frac{(\alpha-\beta)(p-q)^n}{2}.$$

Risulta

$$\lim_{n\to\infty} P_1(n) = \lim_{n\to\infty} P_2(n) = \frac{1}{2},$$

dunque la catena di Markov è ergodica.

3. **Problemi di stabilità finita.**

Un altro aspetto interessante delle matrici stocastiche è la questione della stabilità.

Dati A e x_0, gradiremmo determinare se la distribuzione della frequenza relativa, diventa stabile dopo un numero finito di iterazioni. Questa è chiamata stabilità finita.

Se $x_{t+1} = Ax_t$, allora esiste un numero intero positivo tale che $x_{N+1} = x_N$ o $x_N = Ax_N$. Dopo N periodi, la distribuzione di frequenza relativa diventa costante.

Rivolgiamo adesso l'attenzione alla condizione di stabilità finita, che si riferisce da vicino agli autovalori della matrice stocastica.

Ecco un'importante caratteristica delle matrici stocastiche.

Teorema 1. - Ogni matrice stocastica ha un autovalore $\lambda = 1$.

Dim. Supponiamo una matrice stocastica $A = [a_{ij}]$. Se $\lambda = 1$ è un autovalore, allora $|A - \lambda I| = |A - I| = 0$, dove:

$$|A - I| = \begin{Vmatrix} a_{11}-1 & a_{21} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{Vmatrix}$$

sommando alla prima colonna dalla colonna 2 alla colonna n, si ha che:

$$|A - I| = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} - 1 & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} - 1 & \ldots\ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj} - 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

la somma degli elementi della matrice stocastica A è uguale ad 1, e la prima fila di $|A - I|$ è uguale a 0, quindi $|A - I|$=0, il che prova che $\lambda = 1$ è un autovalore .

Ora dimostriamo un altro teorema che ci darà una condizione necessaria per la stabilità finita.

Teorema 2. Consideriamo $x_{N+1} = Ax_N$. Condizione necessaria per la stabilità finita, $x_N = Ax_N$, è che la matrice A sia singolare.

Dim. Supponiamo che esista un numero intero positivo *N* tale che $x_N = A_N$.
Da $x_N = A^N x_0$, abbiamo che $A^{N+1}x_0 = A^N x_0$. Allora:

$$(A^{N+1} - A^N)x_0 = A^N(A - I)x_0 = 0 .$$

Poniamo $z_0 = (A - I)x_0$. Essendo x_0 arbitraria, lo è anche z_0. Quindi $A^N z_0 = 0$, significa che A^N è una matrice singolare, e $\|A^N\| = \|A\| \cdot \|A\| ...... \|A\| = 0$. Questo equivale a dire che *A* è singolare.

Utilizziamo una matrice stocastica per studiare le abitudini di acquisto dei clienti di una compagnia petrolifera fittizia.

Gli elementi di un vettore stocastico o le colonne di una matrice stocastica, sono spesso associati con le probabilità di estrazione di un dato evento. Per questa ragione, le matrici stocastiche, vengono anche chiamate "matrici di transizione delle probabilità".

Esempio 1

Consideriamo la seguente situazione, che può essere analizzata con una matrice stocastica.

Una compagnia petrolifera, distribuisce tre differenti tipi di carburante: Super, Diesel e GPL.

Supponiamo che il reparto marketing della società voglia condurre uno studio delle abitudini di acquisto dei propri clienti.

Questo studio, prevede la probabilità che i clienti acquisteranno un determinato tipo di carburante, basandosi sul tipo scelto dagli stessi nel precedente acquisto.

I risultati dello studio sono i seguenti:

1) Il 60% dei clienti che hanno acquistato precedentemente (t = 0) il carburante "Super", lo compreranno ancora nel prossimo acquisto (t = 1). Il 20% degli stessi opterà per il "Diesel", ed il restante 20% sceglierà il "GPL".
2) Il 70% dei clienti che hanno acquistato precedentemente (t = 0) il carburante "Diesel", lo compreranno ancora nel prossimo acquisto (t = 1). Il 20% degli stessi opterà per il "Super", ed il restante 10% sceglierà il "GPL".
3) Il 50% dei clienti che hanno acquistato precedentemente (t = 0) il carburante "GPL", lo compreranno ancora nel prossimo acquisto (t = 1). Il 20% degli stessi opterà per il "Super", ed il restante 30% sceglierà il "Diesel".

Costruiamo così con i dati raccolti dallo studio, una matrice stocastica di transizione delle probabilità:

$$A = \begin{Vmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{Vmatrix} .$$

La componente a_{ij} rappresenta la probabilità che i clienti che acquistarono il j-esimo tipo di carburante passerà all'i-esimo tipo.

Così $a_{23} = 0.3$ indica un'opportunità del 30% di cambiare dal carburante Diesel $j = 3$ al Gpl $i = 2$. Questa matrice di transizione delle probabilità, può essere vista come la descrizione della distribuzione della frequenza relativa di cambio in relazione al tipo di carburante.

Il vettore, $x_0 = [S_0\ D_0\ G_0]^T = [900\ 400\ 200]^T$ rappresenta il numero dei clienti che hanno acquistato rispettivamente il carburante Super, il Diesel e il GPL, al tempo $t = 0$ (cioè al primo acquisto).

È prevedibile che tra i 900 clienti che hanno acquistato la Super al tempo $t = 0$ 540 di loro $a_{11}S_0 = 0.6(900)$ comprerà ancora la stessa anche al tempo $t = 1$ (cioè all'acquisto successivo), mentre 180, $a_{21}S_0 = 0.2(900)$ comprerà il Diesel e i restanti 180 il GPL.

La distribuzione della frequenza relativa il tipo di carburante preferito da questi 1500 clienti al prossimo acquisto sarà:

$$x_1 = A \cdot x_0 = \begin{Vmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 900 \\ 400 \\ 200 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 660 \\ 520 \\ 320 \end{Vmatrix}$$

Ripetendo l'applicazione, si riesce a calcolare, la distribuzione della frequenza relativa del tipo di carburante preferito dal cliente nei vari acquisti $(t = n)$.

Per esempio, dopo due turni di acquisto $(t = 2)$, la distribuzione tra i tre tipi di carburanti è:

$$x_2 = A \cdot x_1 = \begin{Vmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 660 \\ 520 \\ 320 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 564 \\ 592 \\ 344 \end{Vmatrix}$$

Per iterazione si può scrivere:

$$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (A \cdot x_0) = A^2 \cdot x_0 .$$

Il processo può essere continuato, e la distribuzione della frequenza relativa al carburante preferito dai clienti sarà allora:

$$x_k = A \cdot x_{k-1} = A^k x_0 .$$

Un fatto interessante sulle matrici stocastiche è che i prodotti e le potenze di queste matrici sono di nuovo stocastici.

Quindi in questo esempio, A^2, A^3, ... saranno di nuovo matrici stocastiche.

Per esempio, le componenti di A^2 e A^3 sono sempre positive e la somma delle colonne è uguale ad 1.

Servendoci del software "*Mathematica*", siamo riusciti a verificare se la stabilità finita esiste o no.

Si verifica che A non è singolare, cioè

$$|A| \neq 0 ,$$

quindi la stabilità finita non può essere archiviata in un numero finito di acquisti.

Esempio 2

Un'altra applicazione, che può essere analizzata con una matrice stocastica è quella di poter prevedere come sarà la distribuzione della ricchezza in futuro.

Infatti, la distribuzione della ricchezza in un determinato periodo t può essere descritta da un vettore $x_t = [B_t, M_t, A_t]^t$, dove le componenti B_t, M_t, A_t danno rispettivamente la proporzione con cui è ripartita la ricchezza tra la popolazione nelle classi "Basse", "Medie", "Alte".

Procedendo come nell'*esempio 1* è possibile valutare la matrice di transizione da una categoria all'altra.

Bibliografia

1. Ahlfors L.V. - Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill International Editions, 1979.
2. Antognini, Barozzi. -Matematica & Mathematica, Zanichelli.
3. Billingsley P. - Probability and measure, third edition, Wiley Inter-Science.
4. Caristi G. - Again on the derivates of random functions, Atti della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali dell'Accademina Peloritana dei Pericolanti dell'Università degli Studi di Messina, vol. LXXVII, 1999.
5. Caristi G. - La scelta di investimenti pubblici alternativi: la proposta di un modello di ottimizzazione, Tesi di Dottorato, 2000.
6. Caristi G., Ferrara M. - On the derivates of random functions, Seminarbertichte FernUniversität d i Hagen, n. 65, 1998.
7. Caristi G. - On the mean convergence of order P, Seminarbertichte FernUniversität di Hagen, n. 66, 1998.
8. Caristi G. - Parallelizzazione del Metodo Jacobi in ambiente PVM, Tesi di Laurea, 1997.
9. Caristi G. - Parallelizzazione di un codice di dinamica Browniana su Cluster RISC–IBM in ambiente PVM, Tesi di Laurea 1993.
10. Caristi G., Ferrara M. - Sulla convergenza in media quadratica, Rendiconti Seminario Matematico di Messina, n. 5, serie II, 1998.
11. Chow Y.S. - Teicher H – Probability Theory, third edition, Springer Text in Statistics.
12. Dell'Aglio G. - Calcolo delle Probabilità, Zanichelli, 1987.
13. Grimmett G.R., Stirzaker D.R. - Probability and random process, Oxford Science Publications.
14. Huang C.J., Crooke P.S. - Mathematics and Mathematica for Economist, Blackwell Publishers, 1997.
15. Puglisi A., Software "Mathematica" e problemi di stabilità economica, Tesi di Laurea, 2002.
16. Puglisi A., Su un problema di stabilità finita, Annali della Facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Messina, 2003.
17. Sito Web - i^2L_{mat} irrsae Lazio, Istituto Regionale Ricerca Educativa.
18. Sito Web – Fardiconto, Recensione di G.C.Barozzi.
19. Sito Web - www.di.unito.it/~stefano/Mathematica-Dispense

G. CARISTI
gcaristi@dipmat.unime.it
A. PUGLISI
puglisia@unime.it

Dipartimento di Discipline Economico Aziendali
Università di Messina - Facoltà di Economia
Via dei Verdi, 75 - 98122 Messina